

10. Übungsblatt Numerik

Büch, Lutz (Gruppe 7)
Rieck, Bastian (Gruppe 1)

Version vom 6. Juli 2006

Aufgabe 1

Betrachtet man zunächst die Teilsummen, so gilt:

$$(E_n - A) \sum_{i=0}^n A^i = E_n - A + A - A^2 + A^2 - \dots - A^{n+1} = E_n - A^{n+1}$$

Bezüglich der in der Aufgabe definierten Norm gilt $\|A\| < 1$. Daher gilt auch:

$$\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Also konvergiert $E_n - A^{n+1}$ gegen E_n . Dann gilt im Limes:

$$(E_n - A) = (E_n - A)^{-1}(E_n - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Damit gilt die Behauptung. □

Aufgabe 3

Für die Matrix A soll die Cholesky-Zerlegung berechnet werden. A ist symmetrisch und positiv definit, daher existiert $G \in M(3, 3; \mathbb{R})$, sodass $A = GG^T$, wobei gilt:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Also ist GG^T gegeben durch die Matrix:

$$GG^T = \begin{pmatrix} g_{11}^2 & g_{11}g_{21} & g_{11}g_{31} \\ g_{21}g_{11} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} \\ g_{31}g_{11} & g_{31}g_{21} + g_{22}g_{32} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Aus diesen Gleichungen kann man Schritt für Schritt die Koeffizienten der Matrix G bestimmen. Es ergibt sich die Matrix:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Aufgabe 4

Es soll gelten, dass $A = LR$ mit:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{23} & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

Und somit:

$$LR = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ l_{21}r_{11} & l_{21}r_{12} + r_{22} & r_{13}l_{21} + r_{23} \\ r_{11}l_{31} & r_{12}l_{31} + r_{22}l_{23} & r_{13}l_{31} + r_{23}l_{23} + r_{33} \end{pmatrix}$$

Durch Lösen der der Gleichungen kann man die Koeffizienten von L und R bestimmen:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Da die Determinante multiplikativ ist, gilt $\det M = \det L \cdot \det R = 12$. Durch Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus kann die inverse Matrix bestimmt werden:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

□