

## 9. Übungsblatt Numerik

Büch, Lutz (Gruppe 7)  
Rieck, Bastian (Gruppe 1)

Version vom 6. Juli 2006

### Aufgabe 1

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Matrix „naiv“ aufzustellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + \alpha \end{pmatrix}$$

oder (nach Vertauschung der Zeilen):

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall muss mit  $\alpha$  multipliziert werden, um  $x_2$  zu bestimmen. Die ist problematisch für  $\alpha = 0$ . Für  $\alpha \neq 0$  ist  $x_2 = \frac{2-\alpha}{-\alpha+1}$ . Dieser Bruch ist für  $\alpha = 1$  nicht definiert.

Im zweiten Fall muss mit  $\frac{1}{\alpha}$  multipliziert werden, um die Gleichung aufzulösen. Für  $\alpha = 0$  führt dies zu Problemen.

Insgesamt gibt es also für  $\alpha \in \{0, 1\}$  falsche Ergebnisse. Ebenso treten Rundungsfehler auf, wenn es durch den Wert von  $\alpha$  bei einer arithmetischen Operation zu einem Under-/Overflow kommt (zum Beispiel für  $2 - \alpha$  mit  $\alpha$  „sehr groß“).

□

### Aufgabe 2

$p(x)$  linear  $\Rightarrow p(x) = ax + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\int_0^1 (ax + b)e^x dx$  durch partielle Integration geschlossen lösbar:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax + b)e^x dx &= a \int_0^1 xe^x dx + b \int_0^1 e^x dx \\ &= a([xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx) + b(e - 1) \\ &= a + b(e - 1) \end{aligned}$$

Also ist mit  $\int_0^1 p(x)e^x dx = a + b(e - 1)$  eine einfach Quadraturformel gegeben, die alle linearen Polynome  $p(x)$  exakt integriert.

□

### Aufgabe 3

Es gilt für  $(n + 1)$  ungerade, dass  $\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} x^{n+1} dx = 0$ . Durch  $x = y + \frac{a+b}{2}$  kann eine Substitution durchgeführt werden, die ein „verschobenes“ Polynom bildet. Dann gilt:

$$S(x) := \int_a^b \left(\frac{a+b}{2} + y\right)^{n+1} dy = 0$$

Sei nun  $p$  ein Polynom vom Grad  $(n + 1)$  mit  $n \equiv 0 \pmod{2}$ . Dann kann für gegebenes Intervall  $[a, b]$   $\int_a^b p(x) dx$  aufgeteilt werden:

$$p(x) = a_{n+1}x^{n+1} + P_n$$

Wobei  $P_n$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist. Durch Substitution erhält man:

$$\begin{aligned} & \int_a^b a_{n+1}x^{n+1} dx + \int_a^b P_n(x) dx \\ &= \int_a^b ((a_{n+1}S(x) - Q_n(x)) dx + \int_a^b P_n(x) dx \\ &= \underbrace{\int_a^b a_{n+1}S(x) dx}_{=0} + \underbrace{\int_a^b (P_n(x) - Q_n(x)) dx}_{\text{vom Grad } n} \end{aligned}$$

Dabei ist  $Q_n(x)$  ein Polynom vom Grad  $n$ , das von der Substitution abhängt. Da das Ergebnis der Substitution das Integral über ein Polynom vom Grad  $n$  ist, kann die Newton-Cotes-Formel diesen Ausdruck exakt integrieren. □

### Aufgabe 4

#### Der höchste Koeffizient ist 1

Es ist  $p_k(x) = \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Leitet man den Ausdruck  $(x^2 - 1)^k$   $k$ -mal ab, so gilt für den höchsten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} x^{2k} &= (2k) \cdot (2k - 1) \dots (k + 1) x^k \\ &= \frac{(2k)!}{k!} x^k \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Vorfaktors  $\frac{k!}{(2k)!}$  von  $p_k(x)$  gilt also für den höchsten Koeffizienten  $a_k = \frac{k!}{(2k)!} \frac{(2k)!}{k!} = 1$ . □

## Die Legendre-Polynome sind orthogonal

Sei  $k \neq l$ , OBdA  $k < l$ . Dann ist  $I_{k,l} := \langle p_k, p_l \rangle = \int_{-1}^1 \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^k \frac{l!}{(2l)!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx$ .

Nun kann partiell integriert werden (dabei meint  $\tilde{I}_{k,l}$  das Polynom, das entsteht, wenn man die Konstanten der Legendre-Polynome, die zunächst unerheblich sind, vernachlässigt):

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{k,l} &= \left[ \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l \frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^k \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 1 \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} (x^2-1)^l \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l dx \end{aligned}$$

Der erste Term, die Auswertung an den Stellen  $x_0 = -1, x_1 = 1$ , verschwindet, denn:

$$\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l = \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} ((x-1)^n (x+1)^n)$$

Dieser Ausdruck hat aber, da das Polynom mit Grad  $n$  nur  $(n-1)$ -mal abgeleitet wird, auf jeden Fall je eine Nullstelle bei  $x_0 = 1$  und  $x_1 = -1$ . Das Integral, das übrig bleibt, kann nach demselben Verfahren weiter partiell integriert werden, wobei die Auswertung an  $x_0 = -1, x_1 = 1$  immer verschwindet. Damit kann die  $(k+1)$ . Ableitung schrittweise in eine  $(2k+1)$ . Ableitung transformiert werden.

Diese Ableitung wird 0, da  $(x^2-1)^k$  nur Terme bis zum Grad  $2k$  enthält. Somit gilt die Orthogonalität der Legendre-Polynome. □