

7. Übungsblatt Numerik

Büch, Lutz (Gruppe 7)
Rieck, Bastian (Gruppe 1)

Version vom 15. Juni 2006

Aufgabe 1

Allgemein ist ein kubisches Polynom gegeben durch $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Integriert man dieses Polynom über dem Intervall $[x_0, x_1]$, so erhält man:

$$\int_{x_0}^{x_1} ax^3 + bx^2 + cx + d = \frac{1}{4}a(x_1^4 - x_0^4) + \frac{1}{3}b(x_1^3 - x_0^3) + \frac{1}{2}c(x_1^2 - x_0^2) + d(x_1 - x_0)$$

Für diesen Ausdruck soll die Gleichheit mit der Kepler'schen Fassregel beziehungsweise der Simpson'schen Regel gezeigt werden. Diese ist gegeben durch:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{x_1 - x_0}{6} (f(x_0) + 4f\left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right) + f(x_1))$$

Zu zeigen ist nun, dass für die oben definierte Funktion $f(x)$ nicht nur „ \approx “, sondern sogar „ $=$ “ gilt. Dazu berechnen wir zunächst den Ausdruck der Kepler'schen Fassregel und zerlegen diesen in Teile, die nur von a, b, c, d abhängen. Für jeden dieser Teile zeigen wir dann die Gleichheit mit dem entsprechenden Ausdruck im genau berechneten Integral. Rechnet man die Kepler'sche Fassregel aus, so ergibt sich nach Einsetzen von x_0, x_1 in $f(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &\approx \frac{x_1 - x_0}{6} [(ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) \\ &+ 4(a\frac{(x_1 + x_0)^3}{8} + b\frac{(x_1 + x_0)^2}{4} + c\frac{(x_1 + x_0)}{2} + d) \\ &+ (ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d)] \\ &= \frac{(x_1 - x_0)x_0^3 a}{6} + \frac{(x_1 - x_0)x_0^2 b}{6} + \frac{(x_1 - x_0)x_0 c}{6} \\ &+ \frac{(x_1 - x_0)d}{6} + \frac{a(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)^3}{12} + \frac{b(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)^2}{6} \\ &+ \frac{c(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)}{3} + \frac{2d(x_1 - x_0)}{3} + \frac{a(x_1 - x_0)x_1^3}{6} \\ &+ \frac{b(x_1 - x_0)x_1^2}{6} + \frac{c(x_1 - x_0)x_1}{6} + \frac{d(x_1 - x_0)}{6} \end{aligned}$$

Ausgehend von diesem ästhetischen Ausdruck fassen wir die einzelnen Terme gemäß ihrer Zugehörigkeit zu den Koeffizienten a, b, c, d zusammen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \text{Terme, die zu } a \text{ gehören: } & \frac{a(x_1 - x_0)(2a(x_0^3 + x_1^3) + (x_1 + x_0)^3)}{12} = \frac{a(x_1^4 - x_0^4)}{4} \\ \text{Terme, die zu } b \text{ gehören: } & \frac{b(x_1 - x_0)(x_0^2 + x_1^2 + (x_1 + x_0)^2)}{6} = \frac{b(x_1^3 - x_0^3)}{3} \\ \text{Terme, die zu } c \text{ gehören: } & \frac{c(x_1 - x_0)(x_0 + 2(x_1 + x_0) + x_1)}{6} = \frac{c(x_1^2 - x_0^2)}{2} \\ \text{Terme, die zu } d \text{ gehören: } & \frac{6(d(x_1 - x_0))}{6} = d(x_1 - x_0) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist dies in der Summe genau das exakte Integral der Funktion $f(x)$. Damit ist gezeigt, dass die Simpson'sche Regel kubische Polynome exakt integriert. Dies kann man beweisen, indem man ein lineares Gleichungssystem mit den „Gewichten“ der numerischen Quadratur bildet. Die Monome x^1, x^2, x^3 sollen exakt integriert werden. Diese Forderung führt auf ein Gleichungssystem und nach Bestimmung der Gewichte und etwas Rechnerei sollte die Simpson'sche Regel herauskommen. □

Aufgabe 2

Das erste Integral $\int_0^1 \sqrt{t} \sin(t) dt$ kann durch Substitution auf eine numerisch „stabiler“ Form gebracht werden. Dazu substituiert man $t = x^2$. Somit ergibt sich $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. Dies ersetzt man in Integral und erhält:

$$\int_0^1 2x^2 \sin(x^2) dx = 2 \int_0^1 x^2 \sin(x^2)$$

Das entstehende Integral ist offensichtlich einfacher numerisch zu integrieren, da die Ableitungen für jeden Wert beschränkt bleiben. Beim zweiten Integral ist die Angabe einer geschlossenen Lösung nicht möglich. Daher wird das Integral umgeformt zu:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

Unter der Annahme, dass eine Lösung des uneigentlichen Integrals existiert (dies kann man einfach beweisen), kann das Integral so Schritt für Schritt angenähert werden. Dazu wählt man a_0, a_2, \dots, a_n und berechnet jeweils das approximierte Integral I_{a_i} und $I_{a_{i-1}}$. Wenn die Differenz dieser Integrale kleiner als ein vorgegebenes ϵ (beispielsweise die Maschinengenauigkeit) ist, so kann man annehmen, dass das uneigentliche Integral nicht „weiter“ konvergiert. Damit hat man eine (Näherungs-)Lösung gefunden. □

Aufgabe 3

Summierte Trapezregel

Nach der Fehlerformel im Skript gilt für den Fehler Δx :

$$\Delta x \leq \frac{h^2}{12}(b-a) \sup |f''(\xi)|$$

Für $a = 0, b = 1$ ist $\sup |f''(\xi)| = 8$. Also ist der Fehler $\Delta x \leq \frac{8 \cdot h^2}{12}$. Da $\Delta x \leq 10^{-8}$ gelten soll, muss $h \leq \sqrt{10^{-8} \cdot \frac{12}{8}}$ sein. Damit kann man die Anzahl der benötigten Teilintervalle, n , berechnen: $n \geq \frac{1}{h} \approx 8164.97$. Damit muss es mindestens $n = 8165$ Teilintervalle geben, wenn der Fehler sicher kleiner als 10^{-8} sein soll.

In jedem Teilintervall müssen bei der Trapezregel 2 Funktionsaufrufe getätigt werden, denn die Trapezregel ist für ein Teilintervall gegeben durch:

$$\frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Bei $n = 8165$ Teilintervallen gibt es somit die doppelte Anzahl, also mindestens $N = 16330$ Funktionsaufrufe, falls der Fehler $\leq 10^{-8}$ sein soll.

□

Summierte Simpsonregel

Nach Skript ist der Fehler $\Delta x \leq \frac{h^4}{180}(b-a) \sup |f^4(\xi)|$. Da $(b-a) = 1$ und $\sup |f^4(\xi)| = 384$, kommt man auf die folgende Ungleichung:

$$h^4 \leq 10^{-8} * \frac{15}{32} \Rightarrow h \leq 0.00827$$

Somit muss es mindestens $n = h^{-1} = 121$ Teilintervalle geben, wenn der Fehler sicher kleiner 10^{-8} sein soll. Da es bei der summierten Simpsonregel in jedem Teilintervall 3 Funktionsaufrufe gibt, ist mit mindestens $N = 363$ Funktionsaufrufen zu rechnen.

□

Aufgabe 4

Wir führen einen Widerspruchsbeweis anhand zweier einfacher quadratischer Polynome und dem Integrationsintervall $x_0 = 0, x_1 = 1$. Seien f, g quadratische Polynome mit $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + x$. Für das Integral ergibt sich – wie man leicht nachrechnet:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3}$$
$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{5}{6}$$

Wenn es ein α gäbe, sodass $\frac{4}{3} = \alpha(f(0) + f(1)) = \alpha \cdot 3$ und $\frac{5}{6} = \alpha(g(0) + g(1)) = \alpha \cdot 2$ ist, müsste gelten:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} &= 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4}{9} \\ \frac{5}{6} &= 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

Dies führt aber zu einem Widerspruch, da α fest gewählt sein muss und für alle quadratischen Polynome sowie alle Integrationsintervalle gelten soll. \square