

6. Übungsblatt Numerik

Büch, Lutz (Gruppe 7)
Rieck, Bastian (Gruppe 1)

Version vom 8. Juni 2006

Aufgabe 1

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^3 + x & \text{für } a \leq x \leq 0 \\ f_2(x) = x^3 - x & \text{für } 0 \leq x \leq b \end{cases}$$

ist kein Spline, denn die $f(x)$ stimmt zwar an der Intervallgrenze $x = 0$ linksseitig und rechtsseitig überein, das heißt $f_1(0) = f_2(0) = 0$, dies gilt jedoch nicht für die Ableitung:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 3x^2 + 1 \\ f_2'(x) &= 3x^2 - 1 \\ f_1'(0) &= 1 \neq -1 = f_2'(0) \end{aligned}$$

Damit ist die Splinebedingung der ersten Ableitungen nicht erfüllt.

□

Aufgabe 2

Zunächst bestimmt man die benötigte Ableitung der Funktion $f(x)$:

$$f^{(4)} = e^{x^2} ((16x^4 + 24x^2 + 1) \cos(x) - 8x(4x^2 + 5) \sin(x)) - 8x \cos(x) + (x^2 - 12) \sin(x)$$

Unter Verwendung von `GNUPlot` erkennt man, dass $f^{(4)}$ ein Randextremum hat (der Wert ist für $x = -\pi$ oder $x = \pi$ jeweils derselbe). Damit ist $L \approx 3.473137279 \cdot 10^7$. In den Bezeichnungen der Fehlerabschätzung von Satz 3.3.5 setzen wir weiterhin:

$$\begin{aligned} Q &= 1 \quad (\text{da die Stützstellen äquidistant}) \\ c_0 &= \frac{5}{384} \\ h &= \frac{2\pi}{n} \quad (n := \text{Anzahl der Stützstellen} - 1) \end{aligned}$$

Es soll gelten (mit $S(x) :=$ interpolierender Spline):

$$|f(x) - S(x)| \leq c_0 L Q h^4 \leq 10^{-6}$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{5}{384} \cdot 3.473137279 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 &\leq 10^{-6} \\ \Leftrightarrow n^4 &\geq \frac{3.473137279 \cdot 10^7 \cdot \frac{5}{384} \cdot 16\pi^4}{10^{-6}} \\ \Leftrightarrow n &\geq 5152.524324 \end{aligned}$$

Somit ist n mindestens 5153. Damit müssen also zumindest 5154 Stützstellen verwendet werden, wenn der Approximationsfehler sicher kleiner gleich 10^{-6} sein soll.

□

Aufgabe 3

Die Funktion $f(x)$ ist je nach Intervall aus den folgenden Funktionen zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a(x-2)^2 + b(x-1)^3 \\ f_2(x) &= c(x-2)^2 \\ f_3(x) &= d(x-2)^2 + e(x-3)^3 \end{aligned}$$

Mit den Splinebedingungen für die Funktionswerte (Interpolationsbedingung) ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_1(1) &= f_2(1) \Rightarrow a = c \\ f_2(3) &= f_3(3) \Rightarrow c = d \end{aligned}$$

Für die ersten und zweiten Ableitungen der Funktionen an diesen Stellen ergeben sich dieselben Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 2a(x-2) + 3b(x-1) \Rightarrow f_1'(1) = -2a \\ f_2'(x) &= 2c(x-2) \Rightarrow f_2'(1) = -2c, f_2'(3) = 2c \\ f_3'(x) &= 2d(x-2) + 3e(x-3)^2 \Rightarrow f_3'(3) = 2d \end{aligned}$$

Aus $f_1'(1) = f_2'(1)$ folgt wieder $a = c$, aus $f_2'(3) = f_3'(3)$ folgt wieder $c = d$. Und für die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}
f_1''(x) &= 2a + 6b(x-1) \Rightarrow f_1''(1) = 2a \\
f_2''(x) &= 2c \Rightarrow f_2''(1) = 2c, f_2''(3) = 2c \\
f_3''(x) &= 2d + 6e(x-3) \Rightarrow f_3''(3) = 2d
\end{aligned}$$

Somit folgt erneut aus $f_1''(1) = f_2''(1)$ und $f_2''(3) = f_3''(3)$, dass $a = c$ und $c = d$. Der Spline ist also für die folgenden Werte von a, b, c, d, e ein Spline:

$$M = \{(a, b, a, a, e) \mid a, b, e \in \mathbb{R}\}$$

□

Nun bestimmt man durch das Lösen von Gleichungssystemen a, b, e derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
f_1(0) &= 26, f_1(1) = 7 \\
f_2(1) &= 7 \\
f_3(4) &= 25
\end{aligned}$$

Da $a = c = d$, folgt aus $f_2(1) = 7$, dass $a = c = d = 7$. Mit diesem Wissen berechnet man aus $f_1(0) = 4a - b = 28 - b = 26$, dass $b = 2$ gelten muss. Aus $f_3(4) = 4d + e = 28 + e = 25$ folgt, dass $e = -3$ ist. Es wurde bereits gezeigt, dass $f(x)$ für $a = c = d$ ein Spline ist. In der Tat ist leicht zu überprüfen, dass $f(x)$ für $a = c = d = 7, b = 2, e = -3$ die Interpolationsaufgabe löst:

$$\begin{aligned}
f_1(0) &= 28 - 2 = 26 \\
f_1(1) &= f_2(1) = 7 \\
f_3(4) &= 25
\end{aligned}$$

Und somit ist der Spline für die gegebene Interpolationsaufgabe definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 7(x-2)^2 + 2(x-1)^3 & \text{für } x \leq 1 \\ 7(x-2)^2 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 7(x-2)^2 - 3(x-3)^3 & \text{für } 3 \leq x \end{cases}$$

Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei eine Basis unseres n -dimensionalen Funktionenraums gegeben durch:

$$p_i(x) = \begin{cases} x^i + \alpha_i & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Die Basispolynome $p_i(x)$ sind aus Gradgründen offensichtlich linear unabhängig. Mit dieser Basis kann ein Interpolationsproblem, das ein Wertetupel $(x = 0, f(x) = \beta)$ mit $\beta \neq 0$ enthält, nicht gelöst werden, denn:

$\forall i \in \{1, \dots, n\} : p_i(0) = 0$ (nach Definition)

Gesucht ist aber ein $p_i(x)$, sodass $p_i(0) \neq 0$. Dieses existiert in diesem Funktionenraum nicht.

□