

5. Übungsblatt Numerik

Büch, Lutz (Gruppe 7)
Rieck, Bastian (Gruppe 1)

Version vom 1. Juni 2006

Aufgabe 1

Lemma: Sei $n_i > 1, p = (x - x_i)^{n_i} \cdot q$ Polynom vom Grad n , wobei q ein Polynom ist mit $q(x_i) \neq 0$ (es gilt also $\deg(q) = n - n_i$). Mit der Produktregel folgt daraus:

$$\begin{aligned} p' &= n_i \cdot (x - x_i)^{(n_i-1)} \cdot q + (x - x_i)^{n_i} \cdot q' \\ &= (x - x_i)^{(n_i-1)} \cdot (n_i \cdot q + (x - x_i) \cdot q') \end{aligned}$$

Für ein Polynom q' mit $\deg(q') = n - n_i - 1$. Also hat p' eine Nullstelle in x_i mit algebraischer Vielfachheit n_{i-1} . □

Beweis der Fehlerformel: Wir definieren die Hilfsfunktionen r und R analog wie im Beweis zu (3.2.11):

$$\begin{aligned} R &:= \frac{f(\tilde{x}) - P(\tilde{x})}{\omega(\tilde{x})} \\ r(x) &:= f(x) - P(x) - \omega(x) \cdot R \end{aligned}$$

In diesem Fall können wir nicht davon ausgehen, dass alle Nullstellen paarweise verschieden sind, denn die algebraische Vielfachheit jeder Nullstelle kann auch $\neq 1$ sein. Dennoch kann für zwei verschiedene „benachbarte“ Nullstellen $x_i \neq x_{i+1}$ eine Nullstelle in der nächsten Ableitung von r gezählt werden. Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Satz von Rolle.

Für identische Nullstellen ersieht man durch sukzessive Benutzung der Produktregel der Differentiation (Beweis siehe Lemma), dass deren algebraische Vielfachheit sich genau um 1 verringert. Somit ergibt sich für die Ableitungen von r (analog zu 3.2.11):

- r hat mindestens $n + 2$ Nullstellen: $x_0, x_1, \dots, x_n, \tilde{x} \in I$, wobei die x_i mehrfach in dieser Zählung vorkommen (genau n_i -fach)
- r' hat mindestens $n + 1$ Nullstellen
- ...

- $r^{(n+1)}$ hat mindestens 1 Nullstelle ξ

Nun gilt analog zu 3.2.11: $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - R \cdot (n+1)!$, somit ist $0 = r^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - R \cdot (n+1)!$ und durch Auflösen nach R und Einsetzen der Definition folgt:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} &= \frac{f(\tilde{x}) - p(\tilde{x})}{\omega(\tilde{x})} \\ \Rightarrow f(\tilde{x}) - p(\tilde{x}) &= \frac{\omega(\tilde{x})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(\tilde{x})) \end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung für $\tilde{x} \in I$.

□

Aufgabe 2

Die Plots der Funktionen befinden sich im Anhang. Für $h = 0.5$ ist diese Abbildung 1 auf Seite 4, für $h = 1.5$ Abbildung 2 auf Seite 4. Das Polynom, das die Beziehung $\min(f(x)) \leq \tilde{p}(x) \leq \max(f(x))$ (für das Intervall $[0, \dots, 2.5]$) erfüllt, wird durch die Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 2.25, x_3 = 2.5$ beschrieben. Dieses Polynom ist in Abbildung 3 auf Seite 5 beschrieben.

Aufgabe 3

Mit den in der Aufgabe gegebenen Bedingungen folgt, dass das Hermitepolynom allgemein von der Form $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ sein muss. Und mit $f(x) = e^x$ gilt für diese Bedingungen:

$$p(0) = 1, p(1) = e, p'(0) = 1, p'(1) = e, p''(0) = 1$$

Nun können die Gleichungen schrittweise gelöst werden. Dabei werden mit a, b, c, d, e die Variablen der allgemeinen Polynomgleichung bezeichnet:

$$p(0) = 1 \Rightarrow e = 1$$

$$p'(0) = 1 \Rightarrow d = 1$$

$$p''(0) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Die allgemeine Gleichung wurde nun in $p(x) = ax^4 + bx^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ überführt. Aus $p(1) = e$ und $p'(1) = e$ ergeben sich die Gleichungen:

$$a + b + \frac{5}{2} = e$$

$$4a + 3b + 2 = e$$

$$\Rightarrow b = e - \frac{5}{2} - a$$

Setz man dies in die zweite Gleichung ein, so kann man durch wohldefinierte Umformungen a, b bestimmen:

$$\begin{aligned} 4a + 3\left(e - \frac{5}{2} - a\right) &= e - 2 \\ \Rightarrow 4a + 3e - \frac{15}{2} - 3a &= e - 2 \\ &\Rightarrow a = -2e + \frac{11}{2} \approx 0.063436 \\ &\Rightarrow b = 3e - 8 \approx 0.154845 \end{aligned}$$

Somit gilt für das Hermitepolynom:

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(-2e + \frac{11}{2}\right)x^4 + (3e - 8)x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \\ p(x) &\approx 0.063436x^4 + 0.154845x^3 + 0.5x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Der Fehler errechnet sich nun nach der bereits bekannten Fehlerformel. Es sind Stützstellen x_0, x_1 gegeben und insgesamt 5 Bedingungen gesetzt. In den Voraussetzungen der Aufgabe ist somit $n_0 = 3$ und $n_1 = 2$. Damit ist $\omega(x) := x^3 + (x - 1)^2 = x^3 + x^2 - 2x + 1$. Und da $f^{(n)}(x) = f(x)$ für $f(x) = e^x$, gilt:

$$\|f - p\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\omega\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Dabei ist $\|\omega(x)\|_\infty = 1$ (Randextremum) und $\|f^{(n+1)}\|_\infty = e$ (für das gegebene Intervall I). Somit gilt für den Fehler Δx :

$$\Delta x \leq 1 \cdot e \cdot \frac{1}{120} = 0.02265$$

□

Anhang

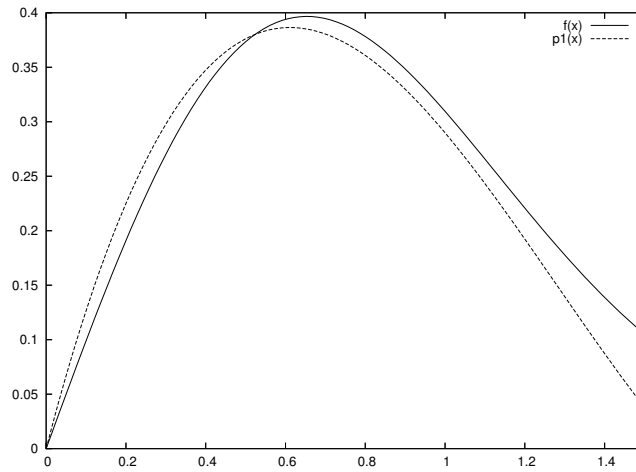


Abbildung 1: f und p_1 für $h = 0.5$

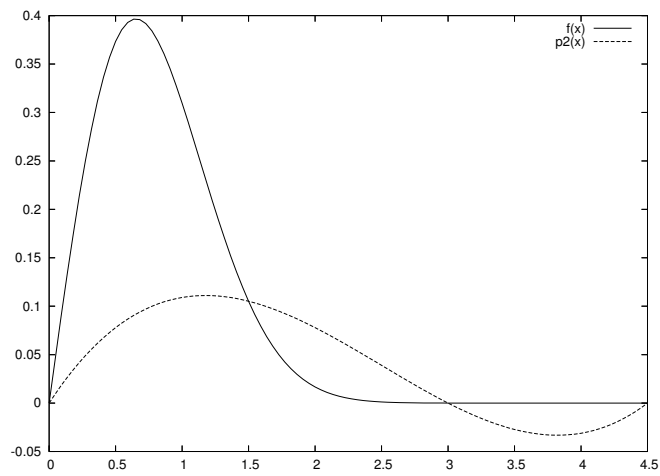


Abbildung 2: f und p_2 für $h = 1.5$, der Fehler ist anschaulich sehr groß

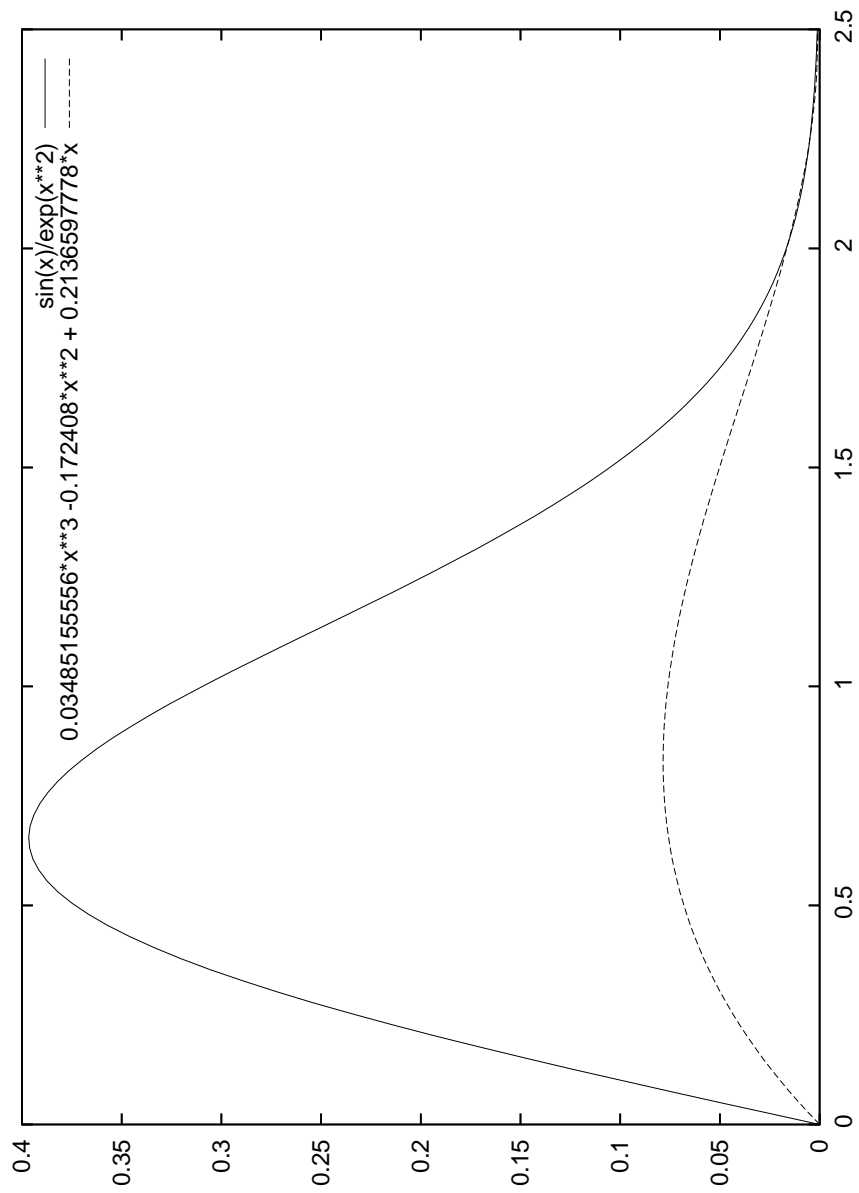


Abbildung 3: f und $\tilde{p}(x)$