4. Übungsblatt Numerik

Büch, Lutz (Gruppe 7)
Rieck, Bastian (Gruppe 1)

Version vom 28. Mai 2006

Aufgabe 1

Durch schrittweises Einsetzen der Bedingungen kann man die Koeffizienten des Polynoms $p(x, y) = a + bx + cy + dxy$ bestimmen:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= 3 \\ d &= -2 \\ \Rightarrow p(x, y) &= 1 + x + 3y - 2xy \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass dieses Polynom den Voraussetzungen genügt. Der Gradient von $p(x, y)$ ist:

$$\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2y \\ 3 - 2x \end{pmatrix}$$

□

Aufgabe 2

Das Polynom g interpoliert f an $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$:

$$\begin{aligned} g(x_0) &= y_0 \\ g(x_1) &= y_1 \\ &\vdots \\ g(x_{n-1}) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

Das Polynom h interpoliert f an $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} h(x_1) &= y_1 \\ h(x_2) &= y_2 \\ &\vdots \\ h(x_n) &= y_n \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst $q(x)$ an den Stellen x_0 und x_n:

$$\begin{aligned} q(x_0) &= g(x_0) + \frac{\overbrace{x_0 - x_0}^{=0}}{x_n - x_0}(g(x_0) - h(x_0)) \\ &= g(x_0) \\ &= y_0 \\ q(x_n) &= g(x_n) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}(g(x_n) - h(x_n)) \\ &= g(x_n) - g(x_n) + h(x_n) \\ &= h(x_n) \\ &= y_n \end{aligned}$$

Es gilt ebenso:

$$g(x_i) - h(x_i) = 0 \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

Und somit:

$$q(x_i) = g(x_i) \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

Also interpoliert q die Funktion f an den Stellen $x_0, \ldots, x_n$.

□

Aufgabe 3

Für $x_0 = 0, y_0 =, x_1 = 1, y_1 = 4$ ergibt sich mit der Langrangebasis:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = 1 - x \\ l_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x \\ \Rightarrow P(x) &= y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) \\ &= 0 \cdot l_0(x) + 4 \cdot l_1(x) \\ &= 4x \end{aligned}$$

Und mit der Newtonbasis:

$$\begin{aligned} n_0(x) &= 1 \\ n_1(x) &= (x - x_0) = x \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind dabei:

$$\begin{aligned} c_0 &= y_0 = 0 \\ c_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 4 \end{aligned}$$

Und somit:

$$N(x) = 4x$$

Fügt man den $x_2 = -1, y_2 = 2$ mit dazu, so gibt es eine neue Lagrangebasis:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = x^2 - 1 \\
l_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{1}{2}(x^2 + x) \\
l_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2}(x^2 - x) \\
\Rightarrow P(x) &= 0 \cdot l_0(x) + 4 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x) \\
&= 3x^2 + x
\end{aligned}$$

Zur bereits bekannten Newtonbasis wird noch $(x - x_0)(x - x_1) = x^2 - x$ hinzugefügt und der neue Koeffizient c_2 berechnet:

$$c_2 = \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 4}{-2} = 3$$

Damit ist das neue Newtonpolynom:

$$N(x) = \underbrace{4x}_{\text{bereits berechnet}} + 3 \cdot (x^2 - x) = 3x^2 + x$$

Offensichtlich ist das Berechnen der Lagrangebasis viel aufwändiger als die Berechnung eines neuen Newtonpolynoms mit dem entsprechenden Koeffizienten. Besonders für die Implementierung im Computer ist die Bestimmung der Newtonbasis effizienter und weniger fehleranfällig. Dies trifft besonders dann zu, wenn viele zusätzliche Stützstellen zu erwarten sind.

Aufgabe 4

1.

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist jede Matrix eine Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms. Also ist die inverse Matrix jeder invertierbaren Matrix als Linearkombination der Potenzen der Matrix für Exponenten kleiner der Zeilenzahl darstellbar.

3.

A ist symmetrisch und positiv definit. Insbesondere ist A somit diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_i > 0$. Da das Diagonalisieren einen Basiswechsel darstellt und nichts an den Eigenschaften von A ändert, sei im Folgenden davon ausgegangen, dass A diagonalisiert ist:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \dots & 0 & \\ \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n & \end{pmatrix}$$

Dabei ist $A = T\tilde{A}T^{-1}$, wobei T die Transformationsmatrix aus Eigenvektoren ist, die A in eine diagonalisierte Matrix überführt. Die Wurzel von $\tilde{A}$ kann nun durch komponentenweises Wurzelziehen berechnet werden. Dies ist möglich, da $\tilde{A}$ eine diagonalisierte Matrix ist. Um $A^{\frac{1}{2}}$ zu berechnen, muss die Basistransformation rückgängig gemacht werden:

$$A^{\frac{1}{2}} = T\tilde{A}^{\frac{1}{2}}T^{-1}$$

Damit ist die positiv definite Matrix eindeutig bestimmt.

$\square$