

3. Übungsblatt Numerik

Büch, Lutz (Gruppe 7)
Rieck, Bastian (Gruppe 1)

Version vom 16. Mai 2006

Aufgabe 1

Die Vorwärtsanalyse betrachtet einen Algorithmus als gut beziehungsweise stabil, wenn eine berechnete Lösung \tilde{l} möglichst nahe an der exakten Lösung l liegt. Hierbei kommt es allerdings bei schlecht konditionierten Problemen zum Versagen der Fehlerabschätzung. Denn selbst bei einem sehr guten Algorithmus wird die Abweichung eines schlecht konditionierten Problems zur exakten Lösung signifikant sein.

Bei der Rückwärtsanalyse wird die berechnete Lösung \tilde{l} als exakte Lösung zu gestörten Ausgangswerten \tilde{x}_i betrachtet. Ergo werden durch Operationen entstehende Fehler zurückverfolgt und als Störungen der Eingabedaten interpretiert. Ein Algorithmus, der stabil im Sinne der Rückwärtsanalyse ist, weist somit bei der Approximation der Lösung eines Problems nur eine geringe Abweichung vom Originalproblem auf, selbst wenn dieses schlecht konditioniert sein sollte.

Aufgabe 2

Zunächst wird nachgewiesen, dass die Lösung eindeutig ist. Mit der Basis $\{f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2\} \in P[x]_{\leq 2}$ kann die folgende Matrix aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & f_2(x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt $\det A = 6 (\neq 0)$. Damit ist das Interpolationspolynom eindeutig bestimmt. Zur Berechnung werden die einzelnen Lagrangepolynome $l_i(x)$ aufgestellt:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{6} = \frac{x^2 - 5x}{6} + 1 \\
l_1(x) &= \frac{(x-0)(x-3)}{-2} = \frac{3x - x^2}{2} \\
l_2(x) &= \frac{(x-0)(x-2)}{3} = \frac{x^2 - 2x}{3}
\end{aligned}$$

Für das Lagrangepolynom $P(x)$, welches die Bedingungen an den Stützstellen erfüllt, gilt somit:

$$P(x) = \sum_{i=0}^2 y_i l_i(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 3$$

□

Aufgabe 3

1.: Durch partielle Integration, kann man beweisen, dass für die Vorwärtsrekursion folgende Beziehung zwischen I_{n-1} und I_n gilt:

$$\begin{aligned}
I_n &= 1 - nI_{n-1} \\
I_0 &= 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63212
\end{aligned}$$

□

Berechnet man die Werte mit einem rekursiven Algorithmus, der durch Gleitkommaoperationen einen bereits fehlerbehafteten Anfangswert hat, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_{10} &= 0.083773439833891 \\
I_{20} &= -69478144.4601392
\end{aligned}$$

Der relative Fehler ist für I_{20} also astronomisch groß.

2.: Der Fehler pflanzt sich nicht linear fort, sondern wächst über alle Schranken, genauer gesagt wächst der Fehler so schnell wie die Fakultätsfunktion.

Sei I_0 der Startwert und \tilde{I}_0 der fehlerbehaftete Wert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
I_n &= 1 - n(1 - (n-1)(1 - (n-2)) \dots (1 - I_0)) \dots \\
\tilde{I}_n &= 1 - n(1 - (n-1)(1 - (n-2)) \dots (1 - \tilde{I}_0)) \dots
\end{aligned}$$

Durch mehrfache Anwendung des Distributivgesetzes sieht man, dass sich für den Betrag des absoluten Fehlers Folgendes ergibt:

$$|I_n - \tilde{I}_n| = n! |I_0 - \tilde{I}_0|$$

Damit gilt die Behauptung.

□

Aufgabe 4