

2. Übungsblatt Numerik

Buech, Lutz (Gruppe 7)
Rieck, Bastian (Gruppe 1)

Version vom 11. Mai 2006

Aufgabe 1

„Lutz Buech“ entspricht 4.5. „Bastian Rieck“ entspricht 7.5. In binärer Darstellung nach **IEEE 754** können die Zahlen wie folgt dargestellt werden:

$$0|10000001|11100000000000000000000000000000 \quad (1)$$

$$0|10000001|00100000000000000000000000000000 \quad (2)$$

Dies entspricht in der vereinfachten Darstellung nach dem Skript:

$$+|1111|11 \quad (3)$$

$$+|1001|11 \quad (4)$$

Wie man an der eindeutigen Darstellung sehen kann, treten bei der Rundung keinerlei Fehler auf. Daher sind absoluter und relativer Fehler = 0.

Aufgabe 2

Im Folgenden wird die durch das Standardskalarprodukt eines Euklidischen Vektorraums definierte Euklidische Norm verwendet. Mit $p(x, y) = 6x + 7y$ gilt: $\|\nabla p(x, y)\| = \sqrt{85} := \kappa_{abs}$. κ_{rel} kann – analog in Teilaufgabe b) – durch Bestimmung des Maximums der folgenden Funktion gefunden werden:

$$\kappa_{rel} = \frac{\|(x, y)\|}{\|p(x, y)\|} \|\nabla p(x, y)\|$$

Für Teilaufgabe a) ist somit das Maximum des Ausdrucks $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{36x^2+49y^2}}\sqrt{85}$ zu bestimmen. Dieses ist ein Randextremum (aufgrund des beschränkten Definitionsbereiches) und liegt bei $(x, y) = (3, 1)$. An dieser Stelle ist $\kappa_{rel} \approx 1.51$.

Für Teilaufgabe b) wird κ_{abs} so bestimmt: $\|\nabla f(x, y)\| = \sqrt{12^2 + (-6)^2} = \sqrt{65} = \kappa_{abs}$. Und κ_{rel} errechnet sich durch Berechnung des Maximums von:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{144x^2 + 36y^2}} \sqrt{65}$$

Dieses ist auch ein Randextremum und liegt bei $(x, y) = (1, 2)$. Hier ist $\kappa_{rel} = 1.062$.

Der relative Eingangsfehler beträgt für p, f 6%. Für den relativen Fehler, der nach Auswertung der Funktion vorliegt, muss in beiden Fällen $\frac{|f(x, y) - f(x + \Delta x, y + \Delta y)|}{|f(x, y)|}$ bestimmt werden (entsprechend für die Funktionen p, f). Für die Funktion p ergibt sich:

$$\frac{|6x + 7y - (6x + y + 6\Delta x + 7\Delta y)|}{|6x + 7y|} = \frac{|\frac{12}{100}x - \frac{28}{100}y|}{|6x + 7y|} \leq \kappa_{rel}(\Delta p_1 + \Delta p_2)$$

Und für f entsprechend:

$$\frac{\frac{24}{100}x - \frac{24}{100}y}{12x - 6y} = \frac{x - y}{50x - 25y} \leq \kappa_{rel}(\Delta p_1 + \Delta p_2)$$

Aufgabe 3

Das Newtonverfahren wird zur numerischen Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ verwendet. Es werden also Näherungen an die Nullstellen der Funktion gefunden. Der Anfangswert x_0 sollte niemals so gewählt werden, dass $f'(x_0) = 0$ gilt, denn dann ist der Bruch $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ nicht definiert.

In der folgende Formalisierung ist die Anzahl der Komponenten im Vektor von einem Schritt zum anderen nicht konstant, da nicht benötigte Werte entfernt werden. Dies ist laut Vorlesung gestattet.

Formalisierung:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \\ f'(x_0) \\ f := \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 := x_0 - f \\ f(x_0) \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \\ f'(x_1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \\ f'(x_1) \\ f := \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \end{pmatrix} \rightarrow \\ \begin{pmatrix} x_2 := x_1 - f \\ f(x_1) \\ f'(x_1) \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ f(x_{n-1}) \\ f'(x_{n-1}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ f(x_{n-1}) \\ f'(x_{n-1}) \\ f := \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} := x_n - f \\ f(x_n) \\ f'(x_n) \end{pmatrix} \rightarrow (x_{n+1})$$

Die Eingabedaten sind aus dem \mathbb{R}^3 , die Ausgabedaten sind aus \mathbb{R} . Ein Perl-Snippet könnten den Algorithmus folgendermaßen beschreiben¹:

```

1
2  $x = $x0;
3
4  for( $i = 0; $i < $n; $i++ )
5  {
6      if( df( $x ) != 0 )
7          $x = $x - f( $x ) / df( $x );
8  }

```

¹Wobei $df(x)$ die Ableitung an der Stelle x bezeichnet.

In Zeile 7 wird die eigentliche Elementaroperation ausgeführt, die den jeweils neuen Wert von x_i berechnet.

Aufgabe 4

Die grundlegende Idee besteht in der Einführung von Hilfsfunktionen, deren Werte jeweils einzeln nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren berechnet werden können.

Eine Differentialgleichung der Art $y^{(m)}(x) = f(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(m-1)}(x))$ kann durch Hilfsfunktionen schrittweise in eine Differentialgleichung erster Ordnung transformiert werden:

$$\begin{aligned} a_1(x) &:= y(x) \\ a_2(x) &:= y^{(1)}(x) \\ &\dots \\ a_3(x) &:= y^{(m)}(x) \end{aligned}$$

Dann gilt für die Ableitung der Funktion²:

$$a' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \dots \\ a'_{m-1} \\ a'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_m \\ f(x, a_1, a_2, \dots, a_m) \end{bmatrix}$$

Für die einzelnen Ableitungen kann eine Approximation durch das bereits bekannte Eulerverfahren stattfinden. Sei $a^{(j)}$ allgemein eine der Hilfsfunktionen und $a_i^{(j)}$ ein bereits bekannter Wert der Funktion (z.B. durch die Anfangsbedingungen vorgegeben). Dann kann $a_{i+1}^{(j)}$ für diese Funktion wie folgt approximiert werden³:

$$\begin{aligned} a_{i+1}^{(j)} &= a_i^{(j)} + \Delta x f(x_i, a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(j)}, \dots, a_i^{(n)}) \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta x \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet Δx die Maschenweite. Ausgehend von einer Differentialgleichung erster Ordnung mit gegebenen Endwerten kann der Eulersche Polygonzug einfach rückgängig gemacht werden:

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= u_i - f(x, u_i(x_i))\Delta x \\ x_{i-1} &= x_i - \Delta x \end{aligned}$$

Dabei ist u die Funktion, die entwickelt wird, und x der Endwert (mit $u_n(x_n)$ gegeben). So erhält man Lösungen in der Vergangenheit.

²Der besseren Übersichtlichkeit halber wurde eine vektorielle Schreibweise gewählt.

³Und sukzessive müssen natürlich die Werte aller anderen Hilfsfunktionen berechnet werden. Dies muss in jedem Iterationsschritt geschehen.